信息经济学

第四课：混合策略

彭世喆

数字经济系
长沙理工大学经济与管理学院

2024 年 3 月 21 日

混合策略（Mixed strategy）

混合策略

在混合策略 p 下，玩家随机选择其策略集 S 中的所有纯策略（Pure strategy），其中 $p(s)$ 是选择纯策略 s 的概率，$0 \leq p(s) \leq 1$ 以及 $\sum_{s \in S} p(s) = 1$。

- $p(s) = 0$ 意味着不会选择纯策略 s
- $p(s) = 1$ 意味着退化为纯策略 s
- 混合策略的期望效用等于所含每一个纯策略的期望效用的加权平均（权重为选择概率）

举例

- 考虑如下效用矩阵
- 玩家 1 的策略 $p = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$ 和玩家 2 的策略 $q = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
  - $\mathbb{E}[U_1(A, q)] = \frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} * 0 = 1$
  - $\mathbb{E}[U_1(B, q)] = \frac{1}{2} * 0 + \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$
  - $\mathbb{E}[U_1(p, q)] = \frac{1}{5} * \mathbb{E}[U_1(A, q)] + \frac{4}{5} * \mathbb{E}[U_1(B, q)] = \frac{3}{5}$，位于 $\mathbb{E}[U_1(A, q)]$ 和 $\mathbb{E}[U_1(B, q)]$ 之间

玩家 2

玩家 1		a	b
	A	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$
	B	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{2}$

石头剪刀布游戏

- 策略集：$\{R, S, P\}$
- 不存在纯策略下的纳什均衡
- 用 $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$ 表示一个混合策略组合

玩家 2

玩家 1	R	S	P
R	$0, 0$	$\underline{1}, -1$	$-1, \underline{1}$
S	$-1, \underline{1}$	$0, 0$	$\underline{1}, -1$
P	$\underline{1}, -1$	$-1, \underline{1}$	$0, 0$

纳什均衡

- $((\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}),(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}))$ 是一个纳什均衡
    - R 对 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 的期望效用 $=\frac{1}{3}*0+\frac{1}{3}*1+\frac{1}{3}*(-1)=0$
    - S 对 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 的期望效用 $=\frac{1}{3}*(-1)+\frac{1}{3}*0+\frac{1}{3}*1=0$
    - P 对 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 的期望效用 $=\frac{1}{3}*1+\frac{1}{3}*(-1)+\frac{1}{3}*0=0$
    - $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 对 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 的期望效用 $=\frac{1}{3}*0+\frac{1}{3}*0+\frac{1}{3}*0=0$
    - $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 是 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 的一个最优反应（游戏是公平的）

玩家 2

玩家 1	R	S	P
R	$0, 0$	$\underline{1}, -1$	$-1, \underline{1}$
S	$-1, \underline{1}$	$0, 0$	$\underline{1}, -1$
P	$\underline{1}, -1$	$-1, \underline{1}$	$0, 0$

纳什均衡

混合策略下的纳什均衡

给定混合策略组合 $(p_1, p_2, \ldots, p_N)$，如果对于任意玩家 i，p_i 是 p_{-i} 的最优反应，则称该混合策略组合是一个纳什均衡。

- 如果一个混合策略是最优反应，则其所含的每个纯策略（$p_i(s_i) > 0$）也是一个最优反应。并且，每个纯策略的期望效用相同（用这个技巧来寻找混合策略下的纳什均衡）
- 如果不相同，则剔除低期望效用的纯策略能够增加混合策略的期望效用（想象如何提高一个班的平均成绩。如果对手更喜欢出石头，你会怎么做呢）

纳什均衡

纳什均衡存在定理（Nash equilibrium existence theorem）

每一个有限博弈（有限个玩家和有限个纯策略）至少存在一个纳什均衡。

网球游戏

- 玩家：V 和 S
- 策略：V 选择攻 S 的左还是攻右，S 选择防左还是防右
- 效用：成功概率[1]
- 没有纯策略下的纳什均衡
- 选择进攻对手的强项还是弱项？

S

		ℓ	r
V	L	$50, \underline{50}$	$\underline{80}, 20$
	R	$\underline{90}, 10$	$20, \underline{80}$

[1] $U_S(R, \ell) = 10$ 表示出界概率。$U_S(R, r) = 80 > U_S(L, \ell) = 50$ 表示 S 的正手比反手强。

纳什均衡

- 寻找混合策略下的纳什均衡 $((p, 1-p), (q, 1-q))$
- 要找到 S 的混合策略 $(q, 1-q)$，需要从 V 的效用入手
  - $\mathbb{E}[U_V(L, q)] = q * 50 + (1-q) * 80$
  - $\mathbb{E}[U_V(R, q)] = q * 90 + (1-q) * 20$
  - 如果 V 在纳什均衡中采取混合策略，则选择 L 和 R 的期望效用必须相等，即 $\mathbb{E}[U_V(L, q)] = \mathbb{E}[U_V(R, q)] \Rightarrow q = 0.6$

		S: ℓ	S: r
V	L	$50, \underline{50}$	$\underline{80}, 20$
V	R	$\underline{90}, 10$	$20, \underline{80}$

纳什均衡

- 要找到 V 的混合策略 $(p, 1-p)$，需要从 S 的效用入手
  - $\mathbb{E}[U_S(p,\ell)] = p * 50 + (1-p) * 10$
  - $\mathbb{E}[U_S(p,r)] = p * 20 + (1-p) * 80$
  - $\mathbb{E}[U_S(p,\ell)] = \mathbb{E}[U_S(p,r)] \Rightarrow p = 0.7$
- $NE = ((0.7, 0.3), (0.6, 0.4))$
- 如果 V 选择 L 的概率大于 0.7，则 S 会一直选择 ℓ（数据分析的好处，可以根据实际行为选择频率和结果赋值）

		S	
		ℓ	r
V	L	$50, \underline{50}$	$\underline{80}, 20$
	R	$\underline{90}, 10$	$20, \underline{80}$

验证纳什均衡

- 验证 $(p, 1-p)$ 是 $BR_V(q, 1-q)$
  - $\mathbb{E}[U_V(L, q)] = 0.6 * 50 + 0.4 * 80 = 0.62$
  - $\mathbb{E}[U_V(R, q)] = 0.6 * 90 + 0.4 * 20 = 0.62$
  - $\mathbb{E}[U_V(p, q)] = 0.7 * 0.62 + 0.3 * 0.62 = 0.62$
  - 没有让 V 严格变好的纯策略偏离，也就不存在让 V 严格变好的混合策略偏离
  - 因此，只需验证有没有让玩家严格变好的纯策略偏离

S

V		ℓ	r
	L	$50, \underline{50}$	$\underline{80}, 20$
	R	$\underline{90}, 10$	$20, \underline{80}$

比较静态分析（Comparative statics）

- S 的左手球技提高后的新效用矩阵如下所示
- 直观分析
  - 直接影响：S 应该更多地防左，导致 q 增加
  - 间接影响：V 会更少地攻 S 的左边，因此 S 应该更多地防右，导致 q 减小
  - 相反的影响，哪种影响更大呢？
- 要找到 S 的新混合策略 $(q, 1-q)$，还是从 V 的效用入手
  - $\mathbb{E}[U_V(L,q)] = \mathbb{E}[U_V(R,q)] \Rightarrow q = 0.5 \downarrow$

S

		ℓ	r
V	L	$30, \underline{70}$	$\underline{80}, 20$
	R	$\underline{90}, 10$	$20, \underline{80}$

启示

- 体育赛事中一般不存在纯策略下的纳什均衡
- 选手采不采取某种战术对比赛结果的影响差不多相同（这种战术无关紧要吗？）
- 恰恰说明此时处于混合策略下的纳什均衡。若一者的期望效用高于另一者，低期望效用的战术才没有存在的必要
- 一位优秀选手的价值并不体现在其战术选择上，而是体现在对对手的行为要求更高（迫使对手调整策略，使自己的团队获益）

约会游戏

- 玩家：男生和女生，忘记事先确定看哪一部电影了
- 纯策略下的纳什均衡：(A, A) 和 (B, B)
- 混合策略下的纳什均衡：$((p, 1-p), (q, 1-q))$
  - $p * 1 + (1-p) * 0 = p * 0 + (1-p) * 2 \Rightarrow p = 2/3$
  - $q * 2 + (1-q) * 0 = q * 0 + (1-q) * 1 \Rightarrow q = 1/3$

		女生 A	女生 B
男生	A	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$
男生	B	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{2}$

纳什均衡

- 验证 $(2/3, 1/3)$ 是男生的一个最优反应
  - 选择电影 A 的期望效用 $= 1/3 * 2 + 2/3 * 0 = 2/3$
  - 选择电影 B 的期望效用 $= 1/3 * 0 + 2/3 * 1 = 2/3$
  - 选择 $(p, 1-p)$ 的期望效用 $= 2/3 * 2/3 + 1/3 * 2/3 = 2/3$
  - 没有严格有利的纯策略偏离，因此也没有严格有利的混合策略偏离

		女生	
		A	B
男生	A	$\underline{2}, \underline{1}$	$0, 0$
	B	$0, 0$	$\underline{1}, \underline{2}$

纳什均衡

- 为什么男生在混合策略纳什均衡中的期望效用 $2/3$ 比在纯策略纳什均衡中的效用（2 或 1）小
  - 因为两人有时见不到面
  - 见面概率 $= 2/3 * 1/3 + 1/3 * 2/3 = 4/9$（超过一半的概率见不到）
- 概率的三种解释
  - 人们就是按照概率随机选择行为的
  - 对手在混合策略中的行为选择概率是玩家对于对手会怎么做的一种主观信念（Belief）或猜测
  - 采取某种行为的玩家比例

税务审计游戏

- 玩家：审计人员和企业
- 策略：审计人员决定审不审计企业、企业决定纳不纳税
- 效用矩阵如下所示，其中审计成本是 2
- 没有纯策略下的纳什均衡
- 混合策略下的纳什均衡：$((p, 1-p), (q, 1-q))$
  - $0 = p * (-10) + (1-p) * 4 \Rightarrow p = 2/7$
  - $q * 2 + (1-q) * 4 = q * 4 + (1-q) * 0 \Rightarrow q = 2/3$

审计人员 \ 企业	纳税	逃税
审计	$2, \underline{0}$	$\underline{4}, -10$
不审计	$\underline{4}, 0$	$0, \underline{4}$

鼓励纳税场景

- 想象 $2/3$ 的企业会诚信纳税（并非随机确定这些企业）
- 想象审计人员按 $2/7$ 的概率随机抽查企业
- 为了鼓励纳税，将逃税罚款由 -10 增加至 -20
  - $0 = p * (-20) + (1 - p) * 4 \Rightarrow p = 1/6 \downarrow$
  - q 不变，因为没有改变行玩家的效用（政策不起作用）

企业

审计人员		纳税	逃税
	审计	$2, \underline{0}$	$\underline{4}, -20$
	不审计	$\underline{4}, 0$	$0, \underline{4}$

大企业场景

- 大企业的逃税效用由 4 增加至 8
  - $0 = p * (-10) + (1 - p) * 8 \Rightarrow p = 4/9 \uparrow$
  - q 不变，因为没有改变行玩家的效用
- 在纳什均衡下，大企业被审计的概率更大，并非因为审计人员认为企业领导层人品不行（欺骗比例不变），而是知道企业更有钱了

		企业	
		纳税	逃税
审计人员	审计	$2, \underline{0}$	$\underline{4}, -10$
	不审计	$\underline{4}, 0$	$0, \underline{8}$

启示

- 为了提高纳税比例
  - 提高审计人员的效用（降低成本、提高抓到逃税行为的奖励）
  - 通过立法直接增加审计抽查比例（给定审计人员的混合策略，求企业的最优反应）

经验 10

如果想改变行玩家在纳什均衡下的混合策略，需要改变列玩家的效用。反之亦然。

Thanks!